

Analisi critica della teoria della consolidazione monodimensionale ed estensione al caso bidimensionale

Critical analysis of theory of consolidation and extension to two-dimensional case

ROMOLO DI FRANCESCO¹

Riassunto

La teoria della consolidazione monodimensionale di Terzaghi, che può essere considerata l'ossatura stessa della Meccanica delle Terre, analizza l'evoluzione temporale delle sovrappressioni interstiziali generate - ad esempio - dai carichi trasmessi dalle fondazioni oppure dalla depressione delle falde; poiché, inoltre, le stesse sono connesse alle tensioni efficaci, a tale evoluzione corrisponde il riassetto strutturale dello scheletro solido con conseguente diminuzione della porosità, dei gradi di libertà ovvero con sviluppo di cedimenti in campo viscoelastico secondo finestre temporali dipendenti dalla permeabilità dei terreni. Occorre però notare che - nonostante la sua valenza - tale teoria deve necessariamente essere interpretata come "imperfetta" poiché, ad esempio, sovrastima i tempi di completamento del fenomeno rispetto ai dati sperimentali essendo limitata al campo monodimensionale; non ultimo, la stessa non può neanche essere considerata completa, dal momento che prende corpo dall'ipotesi che il coefficiente di permeabilità non vari durante l'intero fenomeno transitorio volto alla dissipazione delle sovrappressioni interstiziali e al raggiungimento delle condizioni di equilibrio idrostatico iniziale. Ragionando secondo tale ottica, il punto di partenza della ricerca è consistito nel riesame dell'intera teoria, della soluzione di Taylor che ne sottende l'applicazione sia teorica che sperimentale - mediante l'esecuzione delle

prove edometriche - cercando di evidenziare i principali errori nei quali incorrono, talora, i laboratori geotecnici e che si aggiungono alle limitazioni intrinseche delle formulazioni associate; quindi, dopo alcuni esempi pratici di calcolo, il passaggio successivo è consistito nell'estensione della teoria al caso bidimensionale e nella ricerca della sua soluzione scritta alla luce di quella di Taylor valida per il caso 1D. Infine, dall'applicazione di tale nuova soluzione ad un caso pratico si è scoperto che il problema è legato, ora, all'identificazione delle condizioni al contorno che soddisfano la stessa e che conducono a calcoli più corretti dei tempi di esaurimento del fenomeno; un argomento, quest'ultimo, che apre nuove frontiere di sviluppo sulla base di monitoraggi di futuri fenomeni o sul riesame di casi noti.

Abstract

The one-dimensional consolidation theory of Terzaghi, which can be considered the very backbone of Soil Mechanics, analyzes the temporal evolution of interstitial overpressures generated - for example - by the loads transmitted from foundations or from the depression of the water table; because, in addition, themselves are related to the effective stress, this evolution corresponds to the structural rearrangement of the skeleton solid with a consequent decrease of the porosity, the degrees of freedom and with the development of settlements in the field of viscoelastic second time windows dependent on the permeability of the soil. Though it is noted that - despite its importance -

1 GEO&GEO Instruments⁰ - research and development, Teramo (TE), romolo.difrancesco@vodafone.it

such a theory must necessarily be interpreted as “imperfect” because, for example, overestimate completion times compared to experimental data of the phenomenon being limited to one-dimensional field; not least, the same can not even be deemed to be complete, since it takes shape from the assumption that the permeability coefficient does not vary during the entire transient phenomenon face to dissipation of the overpressure interstitial and the achievement of the conditions of hydrostatic equilibrium initial.

Reasoning according to this perspective, the starting point of the research was to review the whole theory, the solution of Taylor that underlies the application of both theoretical and experimental - by running the tests eodometer - trying to highlight the major errors in they run, sometimes, same geotechnical laboratories in addition to the inherent limitations associated formulations; so, after a few practical examples of calculation, the next step consisted in extending the theory to two-dimensional case and the search for its solution written in the light of Taylor’s solution valid for the case 1D. Finally, application of this new solution to a practical case it was discovered that the problem is, now, to the identification of the boundary conditions that satisfy the same and that lead to correct calculations of the times of exhaustion of the phenomenon; an argument, the latter, which opens up new frontiers of development based on monitoring of future events or reviews of published cases.

Termini chiave / Keywords

Terzaghi, consolidazione monodimensionale, soluzione di Taylor, prove edometriche, consolidazione bidimensionale.

Terzaghi, Taylor, one-dimensional consolidation, Taylor’s solution, edometric tests, two-dimensional consolidation.

Introduzione alla teoria della consolidazione 1D

L’equazione della consolidazione monodimensionale (TERZAGHI, 1923; TERZAGHI & FRÖHLICH, 1936) descrive il comportamento

idraulico delle terre in condizioni transitorie potendo simulare la variazione temporale delle sovrappressioni interstiziali (u) generate – ad esempio – dal carico indotto

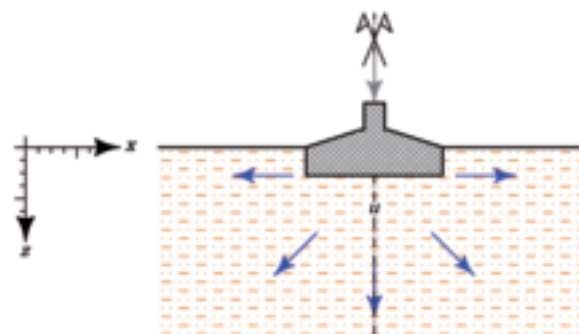


Fig. 1 - Esempio di sviluppo di sovrappressioni interstiziali associate al carico indotto da una fondazione, per il quale valgono le condizioni edometriche solo lungo l’asse baricentrico in funzione dell’esistenza di una simmetria geometrica.

Fig. 1 – Example of development of interstitial overpressure associated to the load induced by a foundation, for which edometric conditions exist only along the centroidal axis in function of the existence of a geometrical symmetry.

da una fondazione (Fig. 1), da un rilevato o semplicemente dall’abbassamento della falda con conseguente sviluppo di cedimenti in campo viscoelastico ai quali corrisponde un riassetto strutturale dello scheletro solido, la riduzione della porosità e contestualmente dei gradi di libertà del sistema.

Tale formulazione, inoltre, può essere ricavata a partire dall’equazione di continuità delle terre (LAMBE & WHITMAN, 1969) le quali, assimilate a mezzi bifase saturi, possono essere schematizzate come costituite da due mezzi continui che agiscono in parallelo spartendosi gli stati tensionali (NOVA, 2002); in questo modo risulta, quale punto di partenza e con poche manipolazione matematiche, la seguente relazione che dimostra la dipendenza del moto di filtrazione transitorio dal coefficiente di permeabilità (K_z) e dal coefficiente di compressibilità (m_v):

$$\frac{1}{m_v \cdot \gamma_w} \cdot \left(K_z \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

Il passo successivo consiste nell'introdurre l'ipotesi (contrastante con i risultati sperimentali) che il coefficiente di permeabilità non vari durante lo sviluppo della consolidazione:

$$\frac{1}{m_v \cdot \gamma_w} \cdot \left(K_z \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

Infine, denotando con c_v il coefficiente di consolidazione:

$$c_v = \frac{K_z}{m_v \cdot \gamma_w} = \frac{K_z \cdot E_{ed}}{\gamma_w} \quad (3)$$

si perviene alla scrittura dell'equazione classica della consolidazione monodimensionale:

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

Appare evidente, a questo punto, che il punto cruciale del problema è insito sia nella determinazione sperimentale del c_v , il quale non segue l'equazione (3) ma è fondata su altre ipotesi, che nell'invariabilità di K_z che a sua volta deve necessariamente diminuire con il procedere della consolidazione essendo lo stesso una misura della porosità di

un terreno; nel contempo, occorre anche evidenziare che l'equazione (4) è idonea all'analisi sia dei processi meccanici descritti che dei bacini di sedimentazione nei quali i terreni consolidano - sotto l'azione del carico litostatico sovrastante - manifestando un incremento dello stato tensionale geostatico che segue la retta di normalconsolidazione $K_0(NC)$ secondo la relazione (Fig. 2):

$$\sigma'_{h0} = K_0(NC) \cdot \sigma'_{v0} \quad (5)$$

Soluzione di Taylor della teoria della consolidazione 1d

La soluzione dell'equazione (4) può essere cercata introducendo due variabili adimensionali:

$$Z = \frac{z}{H} \quad (6)$$

$$T_v = \frac{c_v \cdot t}{H^2}$$

espresse in funzione di H che rappresenta il massimo percorso di drenaggio della fase fluida.

In questo modo l'equazione (4) diventa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{\partial u}{\partial T_v} \quad (7)$$

la cui soluzione analitica è (TAYLOR, 1948):

$$u(z,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2u_{(0)}}{M} (\sin MZ) \cdot e^{-MT_v} \quad (8)$$

con:

$$M = \frac{\pi}{2} (2m+1) \quad (9)$$

e valida per $m \in \mathbb{N}$ e nell'ipotesi che u sia costante con la profondità.

Secondo tale soluzione l'applicazione di un carico induce una sovrappressione interstiziale nel terreno (condizioni iniziali: $t = 0$, $u_{(0)} = u_0$ per $0 \leq Z \leq 2$), la quale si annulla rapidamente in corrispondenza delle superfici di drenaggio (condizioni al contorno: $t > 0$,

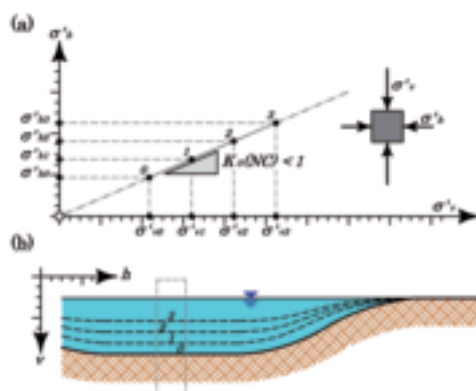


Fig. 2 - Relazione tra le tensioni lungo la retta di normalconsolidazione (a) tipica, ad esempio, dei bacini di sedimentazione lacustre nei luoghi di esistenza delle condizioni di simmetria geometrica (b) (fonte: Di Francesco, 2010 - modificata).

Fig. 2 - Relationship between the tensions along the normalconsolidation line (a) typical, for example, of sedimentation basins of the lake in the places of the existence of conditions of geometric symmetry (b) (by: Di Francesco, 2010 - modificata).

$u(Z=0) = u(Z=2) = 0$), generando un'isocrona il cui ventre coincide con la mezzeria dello strato in consolidazione che a sua volta può essere considerata una superficie impermeabile (Fig. 3a); ciò comporta che la soluzione può essere estesa anche ai casi con drenaggio a una sola estremità ponendo attenzione all'individuazione del valore corretto di H (Fig. 3b). Poiché il drenaggio conseguente alla consolidazione conduce allo sviluppo di cedimenti del terreno è anche possibile definire il grado di consolidazione medio:

$$U_m = \frac{s(t)}{s_f} \quad (10)$$

espresso in funzione del cedimento riferito ad un generico istante ($s(t)$) rispetto al cedimento finale (s_f). Quindi, si dimostra valere anche la relazione:

$$U_m = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \cdot e^{-M^2 T_v} \quad (11)$$

la cui soluzione è illustrata in Fig. 4 in funzione di T_v . Concludendo, la soluzione di Taylor non è altro che uno sviluppo in serie di Fourier troncato in alto, il quale descrive il fenomeno della consolidazione attraverso una funzione iperbolica inversa codificata attraverso valori predeterminati di T_v a loro volta dipendenti da U_m .

Definizione sperimentale della teoria della consolidazione 1d

L'applicazione dell'equazione (4) è vincolata all'esecuzione delle prove edometriche (Fig. 5), il cui primo prototipo può essere fatto risalire a TERZAGHI (1925) mentre le successive evoluzioni a CASAGRANDE (1932), GILBOY (1936), RUTLEDGE (1944) ed altri risultando di fatto standardizzate a partire dal 1945; in tali prove possono essere controllate solo le tensioni (s'_z) e le deformazioni verticali (e_z) essendo di fatto impedito le deformazioni laterali (e_r) e non misurabili le tensioni radiali (s'_r); in questo modo risulta possibile scriverne la relativa equazione costitutiva, espressa in termini differenziali, nella seguente forma semplificata:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_z \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ar} \\ C_{ra} & C_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\sigma'_z \\ d\sigma'_r \end{Bmatrix} \quad (12)$$

nella quale compare la matrice di cedevolezza $[C]$, valida per condizioni edometriche, per i cui dettagli si rimanda a DI FRANCESCO (2012). L'equazione (12) può essere scritta anche in forma estesa:

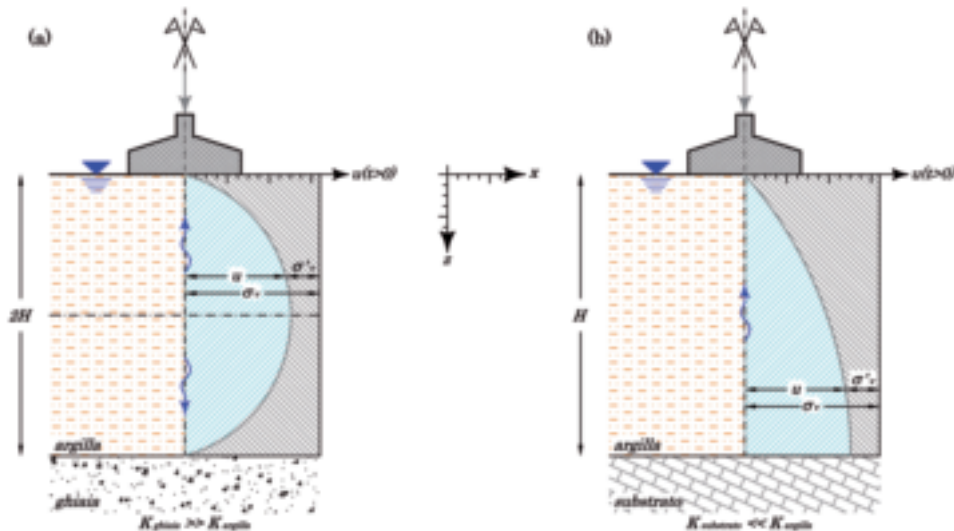


Fig. 3 - Definizione dello spessore drenante, e relativa isocrona della sovrappressione interstiziale, in funzione delle permeabilità relative tra strati a contatto.

Fig. 3 - Definition of thickness draining, and of interstitial overpressure isochronous, depending on the relative permeability between layers in contact.

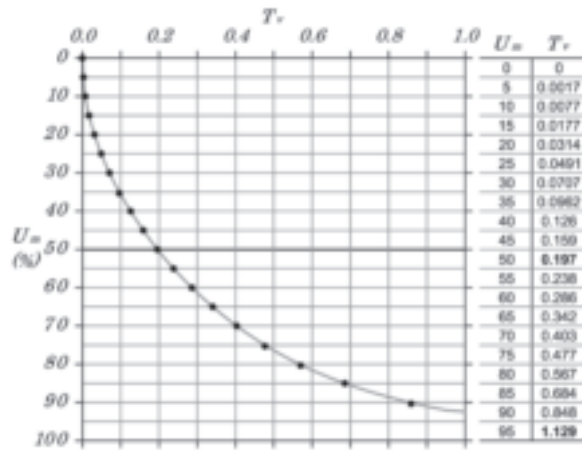


Fig. 4 - Curva di variazione di T_v in funzione del grado di consolidazione U_m e relativa tabella dei valori codificati dalla soluzione di Taylor (fonte: LANCELOTTA, 1987 - modificata).

Fig. 4 - Curve of variation of T_v in function of the degree of consolidation U_m and corresponding table of coded values from the Taylor's solution (by: LANCELOTTA, 1987 - modificata).

$$d\varepsilon_z = C_{aa} \cdot d\sigma'_z + C_{ar} \cdot d\sigma'_r \quad (13a)$$

$$0 = C_{ra} \cdot d\sigma'_z + C_{rr} \cdot d\sigma'_r \quad (13b)$$

Quindi, dall'equazione (13b) può essere ricavata l'espressione di $d\sigma'_r$:

$$d\sigma'_r = -\frac{C_{ra}}{C_{rr}} \cdot d\sigma'_z \quad (14)$$

la quale, a sua volta, può essere inserita nell'equazione (13a):

$$d\varepsilon_z = d\sigma'_z \cdot \left(C_{aa} - \frac{C_{ar} \cdot C_{ra}}{C_{rr}} \right) \quad (15)$$

Analizzando ora le equazioni (14) e (15) si scopre che la prima corrisponde all'equazione (5), fornendo la relazione formale tra le tensioni - secondo la retta di normalconsolidazione - essendo non nulla la componente orizzontale dello stato di sforzo, mentre la seconda dimostra che le deformazioni verticali dipendono dalla combinazione delle costanti viscoelastiche assiali e radiali. Sintetizzando il significato fenomenologico delle formulazioni introdotte risulta che le prove edometriche possono essere proficuamente utilizzate per

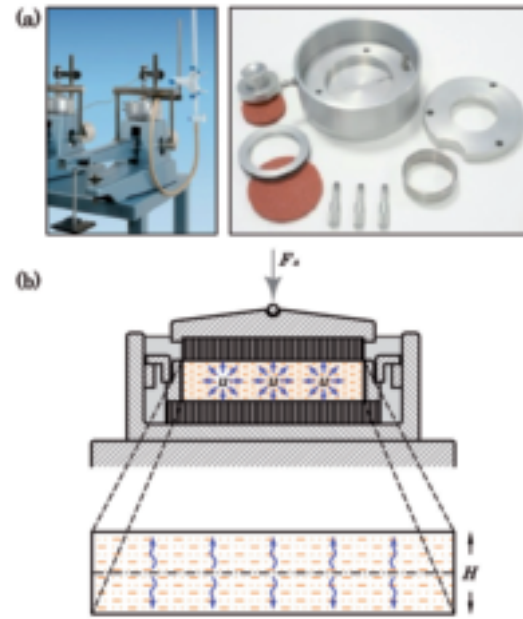


Fig. 5 - Dettagli di cella edometrica e relativi componenti (a); sezione con ingrandimento del provino (b).

Fig. 5 - Details of edometric cell and related components (a); section with magnification of the specimen (b).

l'analisi degli effetti monodimensionali indotti da una sollecitazione generica, nell'ipotesi che valgano le condizioni di simmetria geometrica raffigurate in Fig. 1, tenuto conto che l'equazione (15) può essere scritta anche come:

$$\frac{d\varepsilon_z}{d\sigma'_z} = \left(C_{aa} - \frac{C_{ar} \cdot C_{ra}}{C_{rr}} \right) = \frac{1}{E_{ed}} = m_v \quad (16)$$

In questo modo si giunge alla formulazione del modulo elastico in condizioni edometriche il quale, a sua volta, è inversamente proporzionale al coefficiente di compressibilità presente nell'equazione (3).

Notare, infine, che la condizione edometrica rappresenta un caso speciale dello stato di deformazione piana, nel quale si assiste all'assenza delle deformazioni laterali corrispondente a un valore nullo del coefficiente di Poisson ($\nu = 0$), associata solo all'esistenza di simmetrie geometriche: una condizione riscontrabile, ad esempio, lungo l'asse baricentrico delle fondazioni in presenza di una superficie limite orizzontale ed infinitamente estesa in tale direzione.

Determinazione sperimentale del coefficiente di consolidazione

L'applicazione della teoria della consolidazione è strettamente connessa alla determinazione del c_v , attualmente codificata secondo due metodi entrambi connessi con le prove edometriche (LAMBE, 1951). Tali prove prevedono l'uso di provini circolari aventi diametro D e altezza H , confinati in un anello indeformabile (Fig. 5), con un rapporto D/H non inferiore a 2,5 e non superiore a 6 al fine di minimizzare l'influenza dell'attrito laterale e di evitare flessioni che possano modificare la struttura del terreno (BRUMUND et alii, 1976); le forze assiali di compressione sono applicate secondo un programma di carico (F_a) che segue una progressione geometrica q del tipo:

$$F_{a(n)} = q \cdot F_{a(n-1)} \quad (17)$$

Poiché nei laboratori si assume generalmente $q = 2$ si ottiene una sequenza di carico standard di 25, 50, 100, 200, 400, 800 kPa che può essere ulteriormente incrementata (1600, 3200, 6400 kPa) in relazione alle caratteristiche strumentali ed alle necessità di progetto. Ogni singolo carico è mantenuto per un tempo non inferiore alle 24 h e comunque tale da garantire il passaggio dalla consolidazione primaria, dipendente dal carico, a quella secondaria dipendente dal comportamento puramente reologico dei terreni. La metodologia più accreditata presso i laboratori geotecnici (CASAGRANDE, 1936) conduce all'individuazione, sulle curve sperimentali, dei seguenti elementi (Fig. 6a):

- 1) t_{100} = tempo necessario per il completamento convenzionale della consolidazione primaria;
- 2) t_{50} = tempo corrispondente al raggiungimento del 50% della consolidazione primaria ($U_m = 50\%$ secondo l'equazione (10)) in relazione alla condizione di doppio drenaggio

strumentale del provino (Fig. 5);

- 3) H_{100} = altezza del provino al termine della consolidazione primaria convenzionale, calcolato a partire dall'altezza iniziale pari a 20 millimetri al quale detrarre il valore DH_{100} letto nel grafico.

In questo modo la seconda delle equazioni (6) può essere invertita

$$c_v = \frac{T_v \cdot (H_{100}/2)^2}{t_{50}} = \frac{0,197 \cdot H_{100}^2}{4t_{50}} \quad (18)$$

in funzione di $T_{v(50\%)} = 0,197$ (Fig. 4) e della semialtezza $H_{100}/2$ del provino relativa ad ogni singolo step di carico applicato (Fig. 6b). Noto il c_v relativo al carico di progetto (nel senso che lo stesso deve essere scelto in funzione del livello tensionale atteso), il passaggio successivo comporta il calcolo del tempo di esaurimento della consolidazione:

$$t = \frac{T_{v(95\%)} \cdot H^2}{c_v} = \frac{1,129 \cdot H^2}{c_v} \quad (19)$$

essendo $T_{v(95\%)} = 1,129$ (Fig. 4) ed H l'altezza dello strato secondo quanto evidenziato in Fig. 3. Infine, noti i cedimenti di consolidazione, calcolabili con i metodi propri della Geotecnica e poggiati proprio sull'interpretazione delle prove edometriche, è possibile costruire la curva tempo-cedimenti per i diversi nodi struttura-fondazione dai quali risalire al campo di variazione dei cedimenti differenziali (Fig. 7).

Determinazione sperimentale del coefficiente di permeabilità

Il coefficiente di permeabilità può essere ottenuto, nelle celle edometriche, sia con metodi diretti che con metodi indiretti; nel primo caso occorre eseguire una prova di permeabilità a carico costante alla fine del processo di consolidazione pertinente ad ogni step di carico, mentre nel secondo caso è possibile ricorrere all'applicazione dell'equazione (3) dalla quale ricavare:

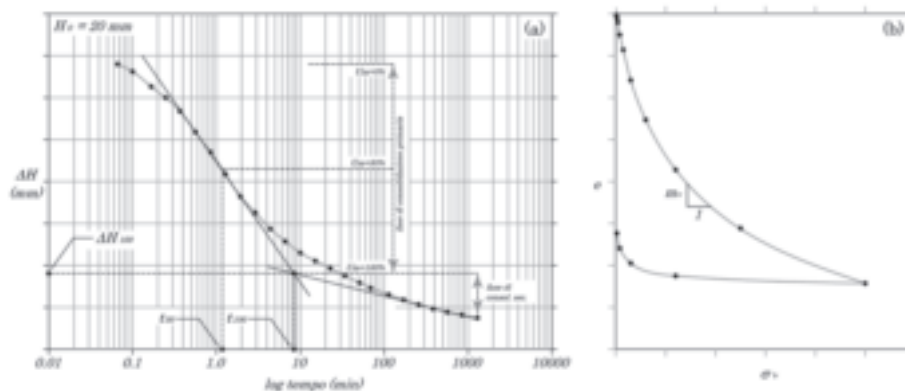


Fig. 6 – Esempio di curva di consolidazione per una determinata condizione di carico (a) e interpretazione dei risultati finali nel piano e, s'_z (b).

Fig. 6 – Example of consolidation curve for a given load condition (a) and interpretation of final results in the plane e, s'_z (b).

$$K_z = c_v \cdot m_v \cdot \gamma_w = \frac{c_v \cdot \gamma_w}{E_d} \quad (20)$$

L'utilizzo dell'equazione (20) comporta però che, a causa della pronunciata non linearità del coefficiente di compressibilità (e del suo inverso, il modulo elastico edometrico – Fig. 6b), K_z risulta marcatamente dipendente dal livello tensionale e , conseguenzialmente, dal livello deformativo; inoltre, poiché il metodo è connesso alla velocità di consolidazione attraverso una relazione diretta con il c_v , si perviene a misure poco precise imputabili sia alle grandezze fisiche che intervengono nel processo che, in particolare, alla non linearità delle stesse.

Riflessioni critiche ed esempi di calcolo

È importante a questo punto evidenziare che l'intero procedimento di analisi del fenomeno dipende dalla determinazione del coefficiente di consolidazione il quale, a sua volta, è strettamente vincolato al livello tensionale applicato tanto da dover essere determinato per ogni curva di consolidazione (Fig. 6a), ovvero per ognuno degli steps di carico di Fig. 6b; allo stesso modo, anche il calcolo del coefficiente di permeabilità - tramite l'equazione (20) - risulta affetto dalle medesime limitazioni, considerato che:

- 1) le approssimazioni introdotte con il c_v si riflettono sul calcolo di tale parametro;

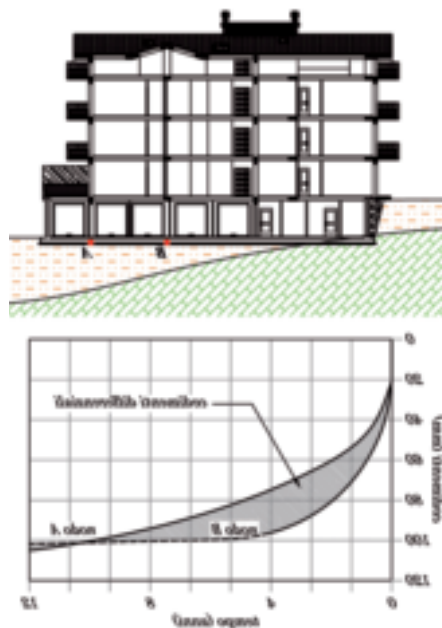


Fig. 7 – Esempio di variazione nel tempo dei cedimenti assoluti relativi a due nodi della medesima fondazione (fonte: DI FRANCESCO, 2011 - modificata).

Fig. 7 – Example of variation in time of absolute settlements relative to two nodes of the same foundation (by: DI FRANCESCO, 2011 - modified).

- 2) lo stesso dipende anche dalla preliminare determinazione del coefficiente di compressibilità m_v il quale, a sua volta, è riferito alla deformazione finale sulle curve di consolidazione mentre il valore del c_v è determinato rispetto all'altezza H_{50} del provino.

Se tali problemi si traducono in vere e proprie discrepanze connesse con l'interpretazione delle prove edometriche, capaci di

influenzare l'applicabilità della teoria della consolidazione dettata dall'equazione (4) e dalle funzioni fisico-matematiche ad essa connesse, occorre evidenziare anche le approssimazioni introdotte da diversi laboratori geotecnici, anche certificati ossia dotati di autorizzazione ministeriale; in effetti, gli errori più tipici riferiti al calcolo del c_v - e riscontrati nell'analisi di numerosi certificati - sono attribuibili all'applicazione, alle singole curve di consolidazione, di finestre temporali inferiori all'esaurimento del fenomeno (Fig. 8) e generalmente limitate a sole 24 ore (1440 minuti), oltre all'utilizzo sia al tempo massimo che del massimo abbassamento dell'altezza del provino. Il problema non deve, comunque, essere banalizzato poichè - come dimostrato dalla figura 7 - da una corretta definizione delle curve tempo-cedimenti discende un'altrettanta corretta analisi degli effetti indotti dallo sviluppo dei cedimenti differenziali; d'altra parte, dall'analisi delle equazioni (18) e (19) risulta che:

- un errore nella determinazione del c_v di un fattore 10 ($c_{v,2} = 10c_{v,1}$, tipico nell'applicazione del tempo massimo di una curva di consolidazione piuttosto che del t_{100}) conduce ad un errore del medesimo ordine di grandezza nel tempo di esaurimento ($t_2 = 10t_1$);
- un errore nella determinazione del c_v di un fattore 2 ($c_{v,2} = 2c_{v,1}$, imputabile ad una scarsa precisione nell'individuazione del t_{100} e del t_{50}) conduce ad un errore $t_2 = 2t_1$.

A titolo di esempio per uno strato a singola direzione di drenaggio (Fig. 3b), ed avente uno spessore di 5 metri, si ottiene:

- $c_v = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ ® $t = 19,9$ anni (dato corretto di riferimento);
- $c_v = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ ® $t = 35,8$ anni (errore dello stesso ordine di grandezza);
- $c_v = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ® $t = 3,6$ anni (errore di un ordine di grandezza).

In ogni caso, anche nell'ipotesi di

un'accurata determinazione del coefficiente di consolidazione (che richiederebbe l'indicazione nei certificati del t_{100} e del t_{50} al fine di consentire una verificare dei calcoli), resta la limitazione della teoria al campo monodimensionale tale da sovrastimare i tempi reali di esaurimento in funzione dello sviluppo del drenaggio anche nella direzione orizzontale.

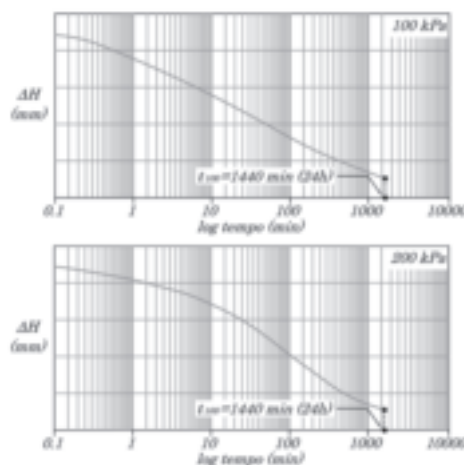


Fig. 8 - Errori tipici dei laboratori geotecnici nell'interpretazione delle prove edometriche, connessi con l'utilizzo di tempi di applicazione dei carichi inferiori o prossimi al completamento della consolidazione primaria.

Fig. 8 - Typical errors of geotechnical laboratories about interpretation of the edometric tests, connected with use of timing of application loads less or close to completion of the primary consolidation.

Introduzione alla teoria della consolidazione 2d

Il superamento dei limiti impliciti nella teoria monodimensionale conduce allo studio del comportamento idraulico e meccanico delle terre in funzione degli effetti indotti dall'anisotropia la quale, tipica dei bacini di sedimentazione, può essere attribuita alle strutture ed alle tessiture interne dei depositi in relazione alle modalità di accumulo e di deformazione effettivamente spaziale; tradotto in termini matematici, risulta che l'evoluzione geologica dei bacini di accumulo impone la loro assimilazione a mezzi trasversalmente isotropi, ossia dotati di un piano di isotropia orizzontale e di un asse di simmetria ad esso normale.

Trasponendo tali elementi alla permeabilità,

risulta che a tali strutture deve corrispondere la seguente condizione:

$$K_x > K_z \quad (21)$$

con un'evidente dipendenza della consolidazione dagli effetti bidimensionali conducente a risultati più aderenti alla realtà. L'utilizzo dell'equazione (21) richiede, quale primo passaggio, la determinazione della permeabilità agente sul piano orizzontale (K_x), ad esempio nelle celle triassiali o nei permeametri, applicando la rotazione degli assi ai provini. Segue la determinazione del rapporto tra le componenti della permeabilità:

$$\frac{K_x}{K_z} = m \quad (22a)$$

$$K_x = m \cdot K_z \quad (22b)$$

il quale può essere esteso anche ai corrispondenti coefficienti di consolidazione alla luce dell'equazione (3):

$$\frac{c_h}{c_v} = m \quad (23a)$$

$$c_h = m \cdot c_v \quad (23b)$$

Infine, può essere scritta l'equazione generale della consolidazione bidimensionale:

$$m \cdot c_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (24)$$

Estensione della soluzione di Taylor alla teoria della consolidazione 2D

La soluzione dell'equazione (24) può essere cercata con le medesime ipotesi viste nel caso della teoria monodimensionale, ovvero iniziando con l'introduzione delle seguenti variabili adimensionali:

$$X = \frac{x}{H} \quad (25)$$

$$T_h = \frac{c_h \cdot t}{X^2} = \frac{m \cdot c_v \cdot t}{X^2}$$

Inserendo le equazioni (6) e (25) nell'equazione

(24) si ottiene dapprima:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{\partial u}{\partial T_h} + \frac{\partial u}{\partial T_v} \quad (26)$$

e successivamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \left(\frac{x}{X}\right)^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \left(\frac{z}{H}\right)^2} = \frac{\partial u}{\partial \left(\frac{m \cdot c_v \cdot t}{X^2}\right)} + \frac{\partial u}{\partial \left(\frac{c_v \cdot t}{H^2}\right)} \quad (27)$$

In ottemperanza con la soluzione del caso 1D, rappresentata dall'equazione (19), è possibile innanzitutto isolare il contenute entro parentesi del secondo termine dell'equazione (27):

$$m \cdot T_v + T_v = \frac{m \cdot c_v \cdot t}{X^2} + \frac{c_v \cdot t}{H^2} \quad (28)$$

Il passaggio successivo consiste nel porre la condizione:

$$X = n \cdot H \quad (29)$$

la quale, inserita nell'equazione (28) e con qualche manipolazione matematica, fornisce la soluzione cercata:

$$t_{2D} = \frac{T_v \cdot H^2}{c_v} \cdot \frac{n \cdot (1+m)}{(n^2 + m)} \quad (30)$$

Notare, infine che, per le ipotesi iniziali date dalle equazioni (22) e (23), la soluzione della consolidazione bidimensionale risulta essere una frazione della teoria monodimensionale, in linea con quanto atteso dal comportamento dei depositi reali in funzione di una marcata anisotropia idraulica dettata proprio dalle modalità di accumulo.

Analisi della soluzione della consolidazione 2D

L'applicazione dell'equazione (30) non appare immediata come nel caso della consolidazione 1D, considerato che le variabili introdotte richiedono uno studio sistematico - al fine di individuare la loro influenza nei confronti del risultato finale - particolarmente riferito

all'incognita rappresentata dalla dimensione orizzontale X . A tal scopo si consideri lo strato di argilla di Fig. 9 il quale, in relazione al confinamento profondo esercitato da uno strato permeabile, risponde alle sollecitazioni imposte con una doppia direzione di drenaggio tale da ridurre lo spessore in consolidazione ad $H = 5$ metri; quindi, si consideri la risposta dell'equazione (30) all'assunzione dei seguenti valori relativi ai parametri aggiuntivi:

- $n = 0,4 - 0,6 - 0,8 - 1,0 - 1,2 - 1,4$
- $m = 1 - 2 - 5 - 10$

che conducono ai risultati illustrati nel grafico di Fig. 10.

Per una corretta interpretazione del grafico occorre innanzitutto precisare che la soluzione offerta dall'equazione (19), relativa alla soluzione canonica di Taylor per il fenomeno in campo monodimensionale, fornisce un tempo di esaurimento della consolidazione $t_{1D} = 3,58$ anni; in successione si scopre che:

- a) a parità di n (che definisce la dimensione orizzontale del terreno in consolidazione) si assiste a una diminuzione dei tempi di esaurimento del fenomeno all'aumentare di m , ovvero all'aumentare della permeabilità in direzione orizzontale;
- b) la condizione relativa al punto precedente è valida solo per $n < 1$, considerato che per $n = 1$ si ottiene $X = H$ mentre la soluzione converge con quella monodimensionale per qualunque valore assunto da m ;
- c) la condizione $n = 1$ corrisponde al limite superiore dei tempi di esaurimento, considerato che gli stessi devono necessariamente essere inferiori per l'estensione del processo al campo bidimensionale del tutto in linea con i risultati sperimentali;
- d) a parità di m , corrispondente alle rette tratteggiate di Fig. 10, i tempi di esaurimento del moto transitorio diminuiscono con il diminuire di n ; d'altra parte, al diminuire di n diminuiscono anche i percorsi di drenaggio in direzione orizzontale.

Sintetizzando i risultati ottenuti si giunge alla conclusione che la larghezza dello strato in consolidazione deve necessariamente essere inferiore al suo spessore; nel contempo, al fine di individuarne il corretto valore, risulta anche evidente che occorre comunque riferirsi alle modalità di deformazione del terreno a sua volta dipendente – ad esempio – dalla geometria di una fondazione e dal livello tensionale applicato.

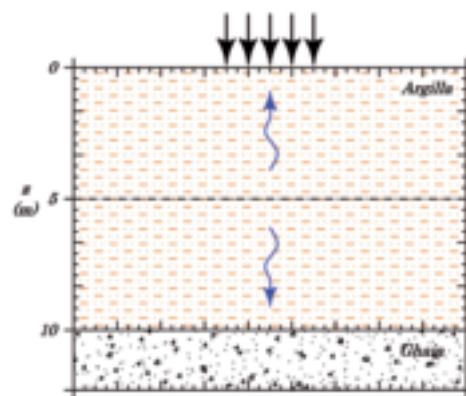


Fig. 9 – Esempio applicativo della teoria della consolidazione 2D.

Fig. 9 – Example of application of the 2D consolidation's theory.

Conclusioni

La teoria della consolidazione di Terzaghi, associata alla soluzione di Taylor e all'esecuzione delle prove edometriche, rappresenta di fatto – unitamente all'introduzione del principio delle tensioni efficaci (Terzaghi, 1923) – la nascita della Geotecnica; eppure, nonostante la sua valenza concettuale, risulta pur sempre limitata al solo caso monodimensionale conducendo ad una sistematica sovrastima dei tempi di esaurimento del fenomeno. Occorre, inoltre, anche evidenziare che le prove edometriche non sempre sono condotte e/o interpretate nel modo formalmente corretto previsto dalla teoria, introducendo in tal modo ulteriori limiti rispetto a quelli già insiti nella stessa. Per ovviare a tali limitazioni è stata proposta l'estensione della teoria al caso bidimensionale nel quale, in relazione alle modalità di accumulo nei bacini deposizionali, si assiste

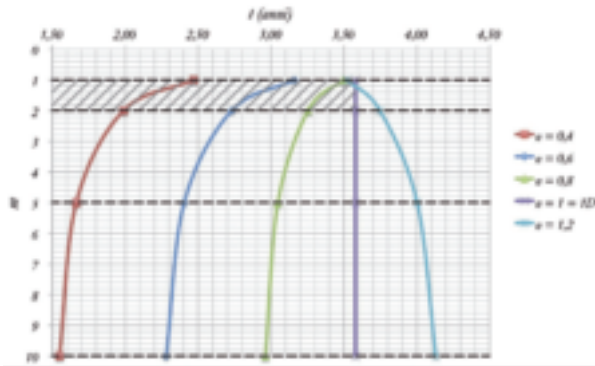


Fig. 10 – Risultati grafici della soluzione della consolidazione 2D relativi all'esempio proposto in Fig. 9.
 Fig. 10 – Graphics results solution for the example of 2D-consolidation proposed in Fig. 9.

ad una doppia direzione di drenaggio con una velocità maggiore nel piano orizzontale; a seguire, facendo leva sulla soluzione canonica di Taylor, è stata anche trovata la possibile soluzione del caso 2D la quale conduce ad una riduzione dei tempi di esaurimento della consolidazione a patto, però, di individuare la corretta dimensione orizzontale. A tal proposito è possibile riferirsi nuovamente alla Fig. 10 nella quale, stante un valore del parametro m noto (nel caso in esempio: $m = 2$), può essere individuato il campo di variazione della dimensione orizzontale delimitata dalla soluzione del caso 1D che costituisce il limite superiore dei tempi di esaurimento del fenomeno transitorio. In ogni caso solo l'analisi retrospettiva di casi noti, e/o il monitoraggio di casi futuri, potrà chiarire gli ultimi aspetti connessi con la teoria della consolidazione bidimensionale.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia Luca Lussari, Assistant Professor presso il Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università Sacro Cuore di Brescia, per la revisione critica dell'intero lavoro.

Riferimenti bibliografici

BRUMUND W.F., JONAS E., LADD C.C., (1976)
 – Estimating in situ Maximum Post Preconsolidation Pressure of Saturated Clays From Results of Laboratory Consolidation Test.

Special Report 163, Transportation Research Board, pp. 4-12.

CASAGRANDE A. (1932) – Structure of clay and its importance in foundation engineering. Boston Soc. Civil Engrs Jour., 19, n. 14, pp 168-209.

CASAGRANDE A. (1936) – The Determination of the Pre-Consolidation Load and its Practical Significance. Proc. 1st ICSMFE, Harvard University Cambridge, Mass., vol. 3, D-34, pp. 60-64.

DI FRANCESCO R. (2010) – Geotecnica, guida pratica alla luce delle NTC 2008. Dario Flaccovio Editore, Palermo.

DI FRANCESCO R. (2011) – Analisi geotecniche di fondazioni superficiali e pali. Dario Flaccovio Editore, Palermo.

DI FRANCESCO R. (2012) – Introduzione al metodo degli elementi finiti, applicato al calcolo strutturale e geotecnico. Dario Flaccovio Editore, Palermo.

GILBOY G. (1936) – Improved soil testing methods. Engineering News Record, 21st May 1936.

LAMBE T.W. (1951) - Soil testing for Engineering. John Wiley & Sons, New York.

LAMBE T.W., WHITMAN R.W. (1969) - Soil Mechanics. John Wiley & Sons, New York.

LANCELLOTTA R. (1987) - Geotecnica. Zanichelli Editore, Bologna.

NOVA R. (2002) - Fondamenti di meccanica delle terre. McGraw-Hill, Companies srl, Milano.

RUTLEDGE P. C. (1944) – Relation of Undisturbed Sampling in Laboratory Testing. Tr. Am. Soc. C.E., n. 109.

TAYLOR D.W. (1948) - Fundamental of Soil Mechanics. John Wiley & Sons, New York.

TERZAGHI K. (1923) - Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus Dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Sitzungsberichte, Abteilung II, vol. 134, n. 3-4.

TERZAGHI K. (1925) - Principles of Soil Mechanics: I – Phenomena of Cohesion of Clays. Engineering News-Record, vol. 95, n° 19, pp. 742-746.

TERZAGHI K., FRÖHLICH O.K. (1936) - Theorie der Setzung von Tonschichte. Leipzig/Wien Deuticke.