

## CALCOLO PORTANZA DI FONDAZIONI SUPERFICIALI

### NORMATIVE DI RIFERIMENTO

#### Norme tecniche per le Costruzioni 2008

*Norme tecniche per le costruzioni D.M. 14 gennaio 2008.*

#### Eurocodice 7

*Progettazione geotecnica – Parte 1: Regole generali.*

#### Eurocodice 8

*Indicazioni progettuali per la resistenza sismica delle strutture - Parte 5: Fondazioni, strutture di contenimento ed aspetti geotecnici.*

### CARICO LIMITE DI FONDAZIONI SU TERRENI

Il carico limite di una fondazione superficiale può essere definito con riferimento a quel valore massimo del carico per il quale in nessun punto del sottosuolo si raggiunge la condizione di rottura (metodo di Frölich), oppure con riferimento a quel valore del carico, maggiore del precedente, per il quale il fenomeno di rottura si è esteso ad un ampio volume del suolo (metodo di Prandtl e successivi).

**Prandtl** ha studiato il problema della rottura di un semispazio elastico per effetto di un carico applicato sulla sua superficie con riferimento all'acciaio, caratterizzando la resistenza a rottura con una legge del tipo:

$$\tau = c + \sigma \times \operatorname{tg} \varphi \quad \text{valida anche per i terreni.}$$

Le ipotesi e le condizioni introdotte dal Prandtl sono le seguenti:

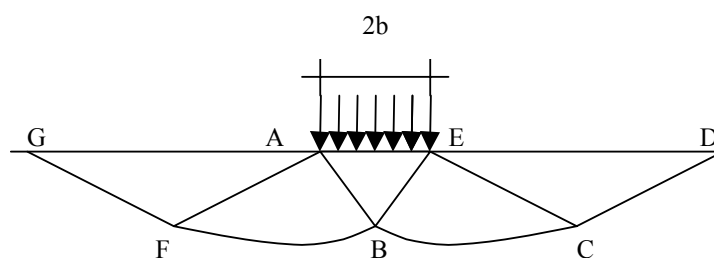
- Materiale privo di peso e quindi  $\gamma=0$
- Comportamento rigido - plastico
- Resistenza a rottura del materiale esprimibile con la relazione  $\tau=c + \sigma \times \operatorname{tg} \varphi$
- Carico uniforme, verticale ed applicato su una striscia di lunghezza infinita e di larghezza  $2b$  (stato di deformazione piana)
- Tensioni tangenziali nulle al contatto fra la striscia di carico e la superficie limite del semispazio.

All'atto della rottura si verifica la plasticizzazione del materiale racchiuso fra la superficie limite del semispazio e la superficie *GFBCD*.

Nel triangolo *AEB* la rottura avviene secondo due famiglie di segmenti rettilinei ed inclinati di  $45^\circ + \varphi/2$  rispetto all'orizzontale.

Nelle zone *ABF* e *EBC* la rottura si produce lungo due famiglie di linee, l'una costituita da segmenti rettilinei passanti rispettivamente per i punti *A* ed *E* e l'altra da archi di due famiglie di spirali logaritmiche.

I poli di queste sono i punti *A* ed *E*. Nei triangoli *AFG* e *ECD* la rottura avviene su segmenti inclinati di  $\pm(45^\circ + \varphi/2)$  rispetto alla verticale.



Individuato così il volume di terreno portato a rottura dal carico limite, questo può essere calcolato scrivendo la condizione di equilibrio fra le forze agenti su qualsiasi volume di terreno delimitato in basso da una qualunque delle superfici di scorrimento.

Si arriva quindi ad una equazione  $q = B \times c$ , dove il coefficiente  $B$  dipende soltanto dall'angolo di attrito  $\varphi$  del terreno.

$$B = \cot g \varphi \left[ e^{\frac{\pi g \varphi}{2}} \frac{2}{\tan (45^\circ + \varphi / 2)} - 1 \right]$$

Per  $\varphi = 0$  il coefficiente  $B$  risulta pari a 5.14, quindi  $q = 5.14 \times c$ .

Nell'altro caso particolare di terreno privo di coesione ( $c=0$ ,  $\gamma \neq 0$ ) risulta  $q=0$ , secondo la teoria di **Prandtl**, non sarebbe dunque possibile applicare nessun carico sulla superficie limite di un terreno incoerente.

Da questa teoria, anche se non applicabile praticamente, hanno preso le mosse tutte le ricerche ed i metodi di calcolo successivi.

Infatti **Caquot** si pose nelle stesse condizioni di Prandtl ad eccezione del fatto che la striscia di carico non è più applicata sulla superficie limite del semispazio, ma a una profondità  $h$ , con  $h \leq 2b$ ; il terreno compreso tra la superficie e la profondità  $h$  ha le seguenti caratteristiche:  $\gamma \neq 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $c = 0$  e cioè sia un mezzo dotato di peso ma privo di resistenza.

Risolvendo le equazioni di equilibrio si arriva all'espressione:

$$q = A \times \gamma l + B \times c$$

che è sicuramente un passo avanti rispetto a Prandtl, ma che ancora non rispecchia la realtà.

### Metodo di Terzaghi (1955)

**Terzaghi**, proseguendo lo studio di Caquot, ha apportato alcune modifiche per tenere conto delle effettive caratteristiche dell'insieme opera di fondazione-terreno.

Sotto l'azione del carico trasmesso dalla fondazione il terreno che si trova a contatto con la fondazione stessa tende a sfuggire lateralmente, ma ne è impedito dalle resistenze tangenziali che si sviluppano fra la fondazione ed il terreno. Ciò comporta una modifica dello stato tensionale nel terreno posto direttamente al di sotto della fondazione; per tenerne conto **Terzaghi** assegna ai lati  $AB$  ed  $EB$  del cuneo di Prandtl una inclinazione  $\psi$  rispetto all'orizzontale, scegliendo il valore di  $\psi$  in funzione delle caratteristiche meccaniche del terreno al contatto terreno-opera di fondazione.

L'ipotesi  $\gamma_2 = 0$  per il terreno sotto la fondazione viene così superata ammettendo che le superfici di rottura restino inalterate, l'espressione del carico limite è quindi:

$$q = A \times \gamma \times h + B \times c + C \times \gamma \times b$$

in cui  $C$  è un coefficiente che risulta funzione dell'angolo di attrito  $\varphi$  del terreno posto al di sotto del piano di posa e dell'angolo  $\varphi$  prima definito;

$b$  è la semilarghezza della striscia.

Inoltre, basandosi su dati sperimentali, *Terzaghi* passa dal problema piano al problema spaziale introducendo dei fattori di forma.

Un ulteriore contributo è stato apportato da *Terzaghi* sull'effettivo comportamento del terreno.

Nel metodo di Prandtl si ipotizza un comportamento del terreno rigido-plastico, *Terzaghi* invece ammette questo comportamento nei terreni molto compatti.

In essi, infatti, la curva carichi-cedimenti presenta un primo tratto rettilineo, seguito da un breve tratto curvilineo (comportamento elasto-plastico); la rottura è istantanea ed il valore del carico limite risulta chiaramente individuato (rottura generale).

In un terreno molto sciolto invece la relazione carichi-cedimenti presenta un tratto curvilineo accentuato fin dai carichi più bassi per effetto di una rottura progressiva del terreno (rottura locale); di conseguenza l'individuazione del carico limite non è così chiara ed evidente come nel caso dei terreni compatti.

Per i terreni molto sciolti, *Terzaghi* consiglia di prendere in considerazione il carico limite il valore che si calcola con la formula precedente introducendo però dei valori ridotti delle caratteristiche meccaniche del terreno e precisamente:

$$tg \varphi_{rid} = 2/3 \times tg \varphi \quad e \quad c_{rid} = 2/3 \times c$$

Esplicitando i coefficienti della formula precedente, la formula di *Terzaghi* può essere scritta:

$$q_{ult} = c \times N_c \times s_c + \gamma \times D \times N_q + 0.5 \times \gamma \times B \times N_\gamma \times s_\gamma$$

dove:

$$N_q = \frac{a^2}{2 \cos^2 (45 + \varphi/2)}$$

$$a = e^{(0.75\pi - \varphi/2) \tan \varphi}$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi$$

$$N_\gamma = \frac{\tan \varphi}{2} \left( \frac{K_p \gamma}{\cos^2 \varphi} - 1 \right)$$

### Formula di Meyerhof (1963)

*Meyerhof* propose una formula per il calcolo del carico limite simile a quella di *Terzaghi*; le differenze consistono nell'introduzione di ulteriori coefficienti di forma.

Egli introdusse un coefficiente  $s_q$  che moltiplica il fattore  $N_q$ , fattori di profondità  $d_i$  e di pendenza  $i_i$  per il caso in cui il carico trasmesso alla fondazione è inclinato sulla verticale.

I valori dei coefficienti  $N$  furono ottenuti da *Meyerhof* ipotizzando vari archi di prova BF (v. meccanismo Prandtl), mentre il taglio lungo i piani AF aveva dei valori approssimati.

I fattori di forma tratti da *Meyerhof* sono di seguito riportati, insieme all'espressione della formula.

$$\text{Carico verticale} \quad q_{ult} = c \times N_c \times s_c \times d_c + \gamma \times D \times N_q \times s_q \times d_q + 0.5 \times \gamma \times B \times N_\gamma \times s_\gamma \times d_\gamma$$

Carico inclinato  $q_{ul} = c \times N_c \times i_c \times d_c + \gamma \times D \times N_q \times i_q \times d_q + 0.5 \times \gamma \times B \times N_\gamma \times i_\gamma \times d_\gamma$

$$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \tan^2(45 + \varphi / 2)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cot \varphi$$

$$N_\gamma = (N_q - 1) \tan(1.4\varphi)$$

fattore di forma:

$$s_c = 1 + 0.2k_p \frac{B}{L} \quad \text{per } \varphi > 10$$

$$s_q = s_\gamma = 1 + 0.1k_p \frac{B}{L} \quad \text{per } \varphi = 0$$

fattore di profondità:

$$d_c = 1 + 0.2\sqrt{k_p} \frac{D}{B}$$

$$d_q = d_\gamma = 1 + 0.1\sqrt{k_p} \frac{D}{B} \quad \text{per } \varphi > 10$$

$$d_q = d_\gamma = 1 \quad \text{per } \varphi = 0$$

inclinazione:

$$i_c = i_\gamma = \left(1 - \frac{\theta}{90}\right)^2$$

$$i_\gamma = \left(1 - \frac{\theta}{\varphi}\right)^2 \quad \text{per } \varphi > 0$$

$$i_\gamma = 0 \quad \text{per } \varphi = 0$$

dove :

$$K_p = \tan^2(45^\circ + \varphi/2)$$

$\theta$  = Inclinazione della risultante sulla verticale.

### Formula di Hansen (1970)

E' una ulteriore estensione della formula di *Meyerhof*; le estensioni consistono nell'introduzione di  $b_i$  che tiene conto della eventuale inclinazione sull'orizzontale del piano di posa e un fattore  $g_i$  per terreno in pendenza.

La formula di Hansen vale per qualsiasi rapporto  $D/B$ , quindi sia per fondazioni superficiali che profonde, ma lo stesso autore introdusse dei coefficienti per meglio interpretare il comportamento reale della fondazione, senza di essi, infatti, si avrebbe un aumento troppo forte del carico limite con la profondità.

Per valori di  $D/B < 1$

$$d_c = 1 + 0.4 \frac{D}{B}$$

$$d_q = 1 + 2 \tan \varphi (1 - \sin \varphi)^2 \frac{D}{B}$$

Per valori  $D/B > 1$ :

$$d_c = 1 + 0.4 \tan^{-1} \frac{D}{B}$$

$$d_q = 1 + 2 \tan \varphi (1 - \sin \varphi)^2 \tan^{-1} \frac{D}{B}$$

Nel caso  $\varphi = 0$

$D/B$	0	1	1.1	2	5	10	20	100
$d'_c$	0	0.40	0.33	0.44	0.55	0.59	0.61	0.62

Nei fattori seguenti le espressioni con apici (') valgono quando  $\varphi=0$ .

Fattore di forma:

$$s'_{i_c} = 0.2 \frac{B}{L}$$

$$s_c = 1 + \frac{N_q B}{N_c L}$$

$$s_c = 1 \quad \text{per fondazioni nastroformi}$$

$$s_q = 1 + \frac{B}{L} \tan \varphi$$

$$s_\gamma = 1 - 0.4 \frac{B}{L}$$

Fattore di profondità:

$$d'_{i_c} = 0.4k$$

$$d_c = 1 + 0.4k$$

$$d_q = 1 + 2 \tan \varphi (1 - \sin \varphi)k$$

$$d_\gamma = 1 \quad \text{per qualsiasi } \varphi$$

$$k = \frac{D}{B} \quad \text{se } \frac{D}{B} \leq 1$$

$$k = \tan^{-1} \frac{D}{B} \quad \text{se } \frac{D}{B} > 1$$

Fattori di inclinazione del carico

$$i'_c = 0.5 - 0.5 \sqrt{1 - \frac{H}{A_f c_a}}$$

$$i_c = i_q - \frac{1 - i_q}{N_q - 1}$$

$$i_q = \left( 1 - \frac{0.5H}{V + A_f c_a \cot \varphi} \right)^5$$

$$i_\gamma = \left( 1 - \frac{0.7H}{V + A_f c_a \cot \varphi} \right)^5 \quad (\eta = 0)$$

$$i_\gamma = \left( 1 - \frac{(0.7 - \eta/450)H}{V + A_f c_a \cot \varphi} \right)^5 \quad (\eta > 0)$$

Fattori di inclinazione del terreno (fondazione su pendio):

$$g'_c = \frac{\beta}{147}$$

$$g_c = 1 - \frac{\beta}{147}$$

$$g_q = g_\gamma = (1 - 0.5 \tan \beta)^5$$

Fattori di inclinazione del piano di fondazione (base inclinata)

$$b'_c = \frac{\eta^\circ}{147^\circ}$$

$$b_c = 1 - \frac{\eta^\circ}{147^\circ}$$

$$b_q = \exp(-2\eta \tan \varphi)$$

$$b_\gamma = \exp(-2.7\eta \tan \varphi)$$

### Formula di Vesic (1975)

La formula di Vesic è analoga alla formula di Hansen, con  $N_q$  ed  $N_c$  come per la formula di Meyerhof ed  $N_\gamma$  come sotto riportato:

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan(\varphi)$$

I fattori di forma e di profondità che compaiono nelle formule del calcolo della capacità portante sono uguali a quelli proposti da Hansen; alcune differenze sono invece riportate nei fattori di inclinazione del carico, del terreno (fondazione su pendio) e del piano di fondazione (base inclinata).

### Formula Brich-Hansen (EC 7 – EC 8)

Affinché una fondazione possa resistere il carico di progetto con sicurezza nei riguardi della rottura generale, per tutte le combinazioni di carico relative allo SLU (stato limite ultimo), deve essere soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$V_d \leq R_d$$

Dove  $V_d$  è il carico di progetto allo SLU, normale alla base della fondazione, comprendente anche il peso della fondazione stessa; mentre  $R_d$  è il carico limite di progetto della fondazione nei confronti di carichi normali, tenendo conto anche dell'effetto di carichi inclinati o eccentrici.

Nella valutazione analitica del carico limite di progetto  $R_d$  si devono considerare le situazioni a breve e a lungo termine nei terreni a grana fine.

Il carico limite di progetto in condizioni non drenate si calcola come:

$$R/A' = (2 + \pi) c_u s_c i_c + q$$

Dove:

$A' = B' L'$  area della fondazione efficace di progetto, intesa, in caso di carico eccentrico, come l'area ridotta al cui centro viene applicata la risultante del carico.

$c_u$  Coesione non drenata.

$q$  pressione litostatica totale sul piano di posa.

$s_c$  Fattore di forma

$$\begin{aligned} s_c &= 1 + 0,2 (B'/L') && \text{per fondazioni rettangolari} \\ s_c &= 1,2 && \text{Per fondazioni quadrate o circolari.} \end{aligned}$$

$i_c$  Fattore correttivo per l'inclinazione del carico dovuta ad un carico  $H$ .

$$i_c = 0,5 \left( 1 + \sqrt{1 - H/A' c_u} \right)$$

Per le condizioni drenate il carico limite di progetto è calcolato come segue.

$$R/A' = c' N_c s_c i_c + q' N_q s_q i_q + 0,5 \gamma' B' N_\gamma s_\gamma i_\gamma$$

Dove:

$$\begin{aligned} N_q &= e^{\pi \tan \phi'} \tan^2(45 + \phi'/2) \\ N_c &= (N_q - 1) \cot \phi' \\ N_\gamma &= 1,5 (N_q - 1) \tan \phi' \end{aligned}$$

### Fattori di forma

$$s_q = 1 + (B'/L') \text{sen} \phi' \quad \text{per forma rettangolare}$$

$$s_q = 1 + \text{sen} \phi' \quad \text{per forma quadrata o circolare}$$

$$s_\gamma = 1 - 0,3(B'/L') \quad \text{per forma rettangolare}$$

$$s_\gamma = 0,7 \quad \text{per forma quadrata o circolare}$$

$$s_c = (s_q \cdot N_q - 1) / (N_q - 1) \quad \text{per forma rettangolare, quadrata o circolare.}$$

### Fattori inclinazione risultante dovuta ad un carico orizzontale $H$ parallelo a $L'$

$$i_q = i_\square = 1 - H / (V + A' c' \cot \square')$$

$$i_c = (i_q N_q - 1) / (N_q - 1)$$

### Fattori inclinazione risultante dovuta ad un carico orizzontale H parallelo a B'

$$i_q = [1 - 0,7H / (V + A' \cdot c' \cdot \cot \phi')]^3$$

$$i_\gamma = [1 - H / (V + A' \cdot c' \cdot \cot \phi')]^3$$

$$i_c = (i_q \cdot N_q - 1) / (N_q - 1)$$

Oltre ai fattori correttivi di cui sopra sono considerati quelli complementari della profondità del piano di posa e dell'inclinazione del piano di posa e del piano campagna (Hansen).

### Metodo di Richards et. Al.

Richards, Helm e Budhu (1993) hanno sviluppato una procedura che consente, in condizioni sismiche, di valutare sia il carico limite sia i cedimenti indotti, e quindi di procedere alle verifiche di entrambi gli stati limite (ultimo e di danno). La valutazione del carico limite viene perseguita mediante una semplice estensione del problema del carico limite al caso della presenza di forze di inerzia nel terreno di fondazione dovute al sisma, mentre la stima dei cedimenti viene ottenuta mediante un approccio alla Newmark (cfr. Appendice H di "Aspetti geotecnici della progettazione in zona sismica" – Associazione Geotecnica Italiana). Gli autori hanno esteso la classica formula trinomia del carico limite:

$$q_L = N_q \cdot q + N_c \cdot c + 0.5 N_\gamma \cdot \gamma \cdot B$$

Dove i fattori di capacità portante vengono calcolati con le seguenti formule:

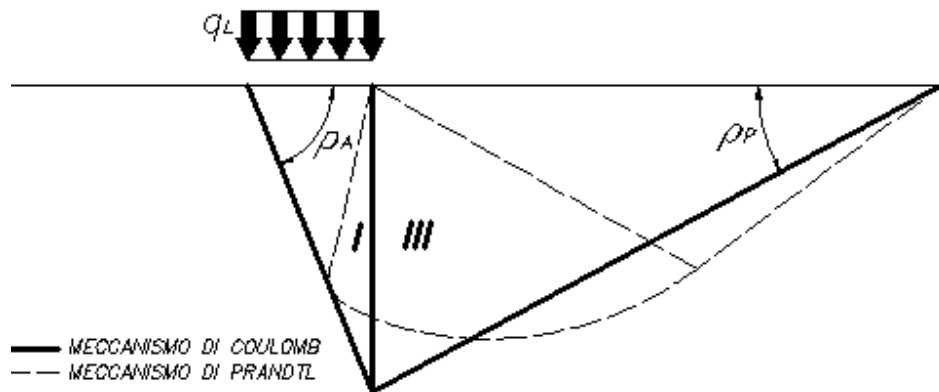
$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot(\phi)$$

$$N_q = \frac{K_{pE}}{K_{AE}}$$

$$N_\gamma = \left( \frac{K_{pE}}{K_{AE}} - 1 \right) \cdot \tan(\rho_{AE})$$

Esaminando con un approccio da equilibrio limite, un meccanismo alla Coulomb e portando in conto le forze d'inerzia agenti sul volume di terreno a rottura. In campo statico, il classico meccanismo di Prandtl può essere infatti approssimato come mostrato nella figura che segue, eliminando la zona di transizione (ventaglio di Prandtl) ridotta alla sola linea AC, che viene riguardata come una parete ideale in equilibrio sotto l'azione della spinta attiva e della spinta passiva che riceve dai cunei I e III:





Schema di calcolo del carico limite ( $qL$ )

Gli autori hanno ricavato le espressioni degli angoli  $\rho_A$  e  $\rho_P$  che definiscono le zone di spinta attiva e passiva, e dei coefficienti di spinta attiva e passiva  $K_A$  e  $K_P$  in funzione dell'angolo di attrito interno  $\varphi$  del terreno e dell'angolo di attrito di terreno – parete ideale:

$$\rho_A = \varphi + \tan^{-1} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\tan(\varphi) \cdot (\tan(\varphi) \cdot \cot(\varphi)) \cdot (1 + \tan(\delta) \cdot \cot(\varphi))} - \tan(\varphi)}{1 + \tan(\delta) \cdot (\tan(\varphi) + \cot(\varphi))} \right\}$$

$$\rho_P = -\varphi + \tan^{-1} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\tan(\varphi) \cdot (\tan(\varphi) \cdot \cot(\varphi)) \cdot (1 + \tan(\delta) \cdot \cot(\varphi))} + \tan(\varphi)}{1 + \tan(\delta) \cdot (\tan(\varphi) + \cot(\varphi))} \right\}$$

$$K_A = \frac{\cos^2(\varphi)}{\cos(\delta) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\delta)}} \right\}^2}$$

$$K_P = \frac{\cos^2(\varphi)}{\cos(\delta) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\varphi)}{\cos(\delta)}} \right\}^2}$$

E' comunque da osservare che l'impiego delle precedenti formule assumendo  $\phi=0.5\delta$ , conduce a valore dei coefficienti di carico limite molto prossimi a quelli basati su un'analisi alla Prandtl. Richards et. Al. hanno quindi esteso l'applicazione del meccanismo di Coulomb al caso sismico, portando in conto le forze d'inerzia agenti sul volume di terreno a rottura. Tali forze di massa, dovute ad accelerazioni  $k_h g$  e  $k_v g$ , agenti rispettivamente in direzione orizzontale e verticale, sono a loro volta pari a  $k_h \gamma$  e  $k_v \gamma$ . Sono state così ottenute le estensioni delle espressioni di  $\rho_A$  e  $\rho_P$ , nonché di  $K_A$  e  $K_P$ , rispettivamente indicate come  $\rho_{AE}$  e  $\rho_{PE}$  e come  $K_{AE}$  e  $K_{PE}$  per denotare le condizioni sismiche:

$$\rho_{AE} = (\varphi - \vartheta) + \tan^{-1} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{(1 + \tan^2(\varphi - \vartheta)) \cdot [1 + \tan(\delta + \vartheta) \cdot \cot(\varphi - \vartheta)]} - \tan(\varphi - \vartheta)}{1 + \tan(\delta + \vartheta) \cdot (\tan(\varphi - \vartheta) + \cot(\varphi - \vartheta))} \right\}$$

$$\rho_{PE} = -(\varphi - \vartheta) + \tan^{-1} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{(1 + \tan^2(\varphi - \vartheta)) \cdot [1 + \tan(\delta + \vartheta) \cdot \cot(\varphi - \vartheta)]} - \tan(\varphi - \vartheta)}{1 + \tan(\delta + \vartheta) \cdot (\tan(\varphi - \vartheta) + \cot(\varphi - \vartheta))} \right\}$$

$$K_{AE} = \frac{\cos^2(\varphi - \vartheta)}{\cos(\vartheta) \cdot \cos(\delta + \vartheta) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\varphi - \vartheta)}{\cos(\delta + \vartheta)}} \right\}^2}$$

$$K_{PE} = \frac{\cos^2(\varphi - \vartheta)}{\cos(\vartheta) \cdot \cos(\delta + \vartheta) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \cdot \sin(\varphi - \vartheta)}{\cos(\delta + \vartheta)}} \right\}^2}$$

I valori di  $N_q$  e  $N_\gamma$  sono determinabili ancora avvalendosi delle formule precedenti, impiegando naturalmente le espressioni degli angoli  $\rho_{AE}$  e  $\rho_{PE}$  e dei coefficienti  $K_{AE}$  e  $K_{PE}$  relative al caso sismico. In tali espressioni compare l'angolo  $\theta$  definito come:

$$\tan(\theta) = \frac{k_h}{1 - k_v}$$

Nella tabella che segue sono mostrati i fattori di capacità portante calcolati per i seguenti valori dei parametri:

$$- \quad \phi = 30^\circ \quad \delta = 15^\circ$$

Per diversi valori dei coefficienti di spinta sismica:

kh/(1-kv)	$N_q$	$N_\gamma$	$N_c$
0	16.51037	23.75643	26.86476
0.087	13.11944	15.88906	20.9915
0.176	9.851541	9.465466	15.33132
0.268	7.297657	5.357472	10.90786
0.364	5.122904	2.604404	7.141079
0.466	3.216145	0.879102	3.838476
0.577	1.066982	1.103E-03	0.1160159

Tabella dei fattori di capacità portante per  $\phi=30^\circ$